

Канд. техн. наук Р.В. Кирия,
канд. техн. наук В.Ю. Максютенко,
мл. научн. сотр. Д.Д. Брагинец,
мл. научн. сотр. Б.И. Мостовой
(ИГТМ НАН Украины)

К ВОПРОСУ ОБ ИСТЕЧЕНИИ СЫПУЧЕГО ГРУЗА ИЗ БУНКЕРА СО ЩЕЛЕВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

На основі структурно-механічного аналізу руху сипкого вантажу в бункері отримано математичну модель його витікання через щілиний випускний отвір. Отримані результати з достатньою точністю співпадають з експериментальними даними.

TO THE QUESTION ABOUT OUTFLOW OF FRIABLE LOAD FROM BUNKER WITH CRACK OUTLET

On the basis of structural-mechanical analysis of motion of friable load in a bunker the mathematical model of its outflow through a crack outlet is got. The obtained results well enough coincide with experimental data.

Вопросом истечения сыпучих грузов из бункеров занимались многие исследователи [1-12]. Однако эта проблема в настоящее время остается еще не решенной. Это подтверждается, во-первых, тем, что у многих исследователей существенно различаются результаты экспериментальных исследований, во-вторых, в настоящее время не существует теории истечения сыпучих грузов из бункера, подтвержденной экспериментально.

Кроме того, в работах [1, 2, 3, 5, 8, 9] при объяснении процесса истечения сыпучих грузов из бункера пользуются понятием динамического свода, однако трактовка физики этого понятия у каждого из авторов существенно отличается.

В данной работе на основе структурно-механического анализа движения сыпучего груза в бункере получена математическая модель его истечения через щелевое выпускное отверстие.

Рассмотрим истечение несвязного сыпучего груза из прямоугольного бункера с горизонтальным щелевым отверстием с шириной a и длиной b ($b > a$) (рис. 1).

Согласно экспериментальным исследованиям [3,4,8,9,12], при истечении сыпучего груза из бункера можно выделить 5 зон, отличающихся друг от друга структурно-механическим состоянием.

Зона 1 поршневого движения **A** (см. рис. 1). В этой зоне частицы сыпучего груза связаны между собой и движутся с малой скоростью параллельно стенкам бункера.

В зоне **B** (см. рис. 1) частицы насыпного груза скользят относительно друг друга, а их траектории искривляются в направлении к оси бункера. В этой зоне скорости частиц также малы и изменяются незначительно.

В зоне динамического свода **C** (см. рис. 1) частицы сыпучего груза образуют подвижные своды, движущиеся вниз, скользя по стенкам канала, ширина которого равна ширине выпускного отверстия.

При этом скорости частиц сыпучего груза существенно увеличиваются, а их траектории приближаются к вертикальным линиям.

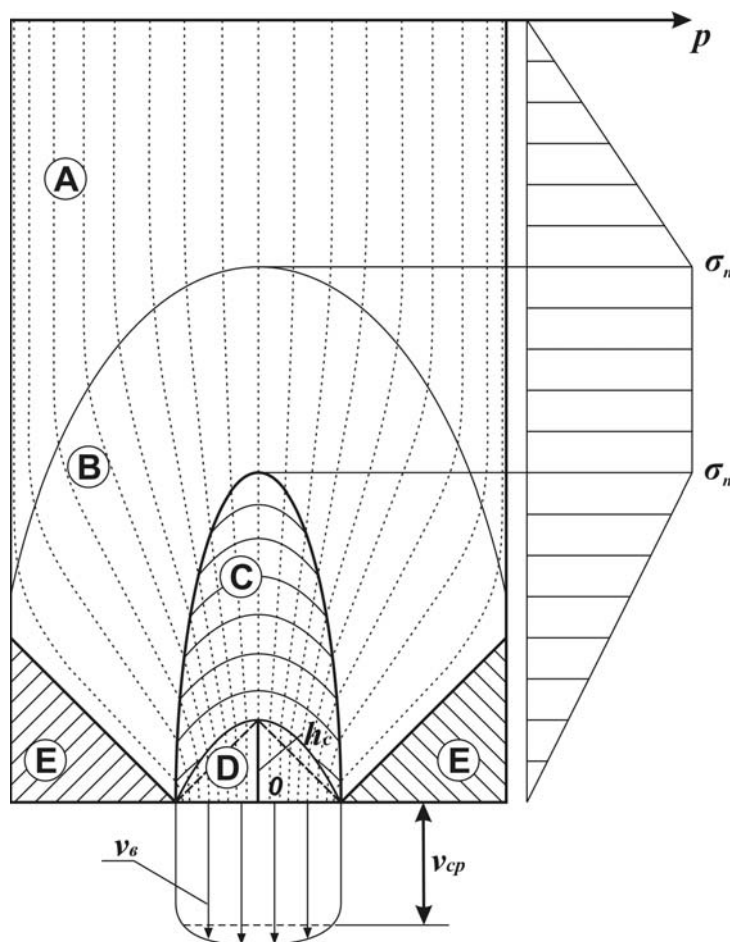


Рис. 1 – Зоны при истечении сыпучего груза из бункера с щелевым отверстием

В зоне обрушения (перемешивания) **D** связи между частицами сыпучего груза разрушаются, при этом они находятся в непрерывном хаотическом движении, сталкиваясь между собой. Траектории движения частиц в этой зоне совпадает с вертикальными линиями, а их скорость увеличивается за счет силы тяжести.

В зоне **E** частицы сыпучего груза находятся в неподвижном состоянии.

Опишем движение частиц в каждой зоне.

В зоне **A** сыпучий груз движется как твердое тело с неизменной малой скоростью, и для его внутренних напряжений справедлив закон Гука. В этой зоне нормальное напряжение p увеличивается от нуля до максимального значения σ_n (см. рис. 1).

В зоне **B** сыпучий груз движется также с малой скоростью, находясь в пластичном состоянии, и для его внутренних напряжений справедлив закон Кулона [13].

При этом, если высота сыпучего груза в бункере намного больше его ширины, то, согласно [7], внутренние напряжения в зоне **B** принимают максимальные значения и не изменяются с глубиной сыпучего груза (см. рис. 1). Это связано с тем, что с увеличением глубины сыпучего груза за счет его веса нор-

максимальные напряжения увеличиваются и из-за бокового распора увеличиваются касательные напряжения, которые, в конце концов, уравновесятся силами веса сыпучего груза. Поэтому нормальные касательные напряжения, действующие на сыпучий груз, принимают максимальные значения и с увеличением глубины не изменяются.

Определим максимальные напряжения в этой зоне. Выделим малый прямоугольный элемент сыпучей среды с шириной Δx и высотой Δy (рис. 2).

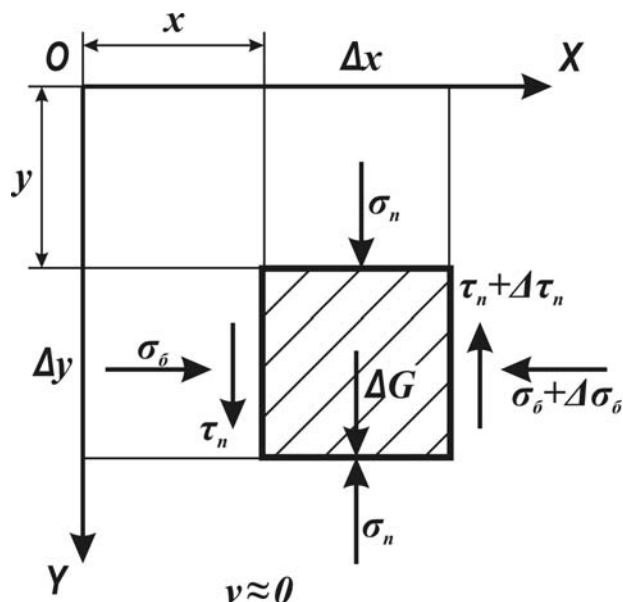


Рис. 2 – Расчетная схема максимальных усилий в зоне **B**

Так как в зоне **B** скорости частиц сыпучего груза малы, то условия равновесия выделенного элемента сыпучей среды имеют вид

$$\Delta G + F_c = 0, \quad (1)$$

где ΔG – вес элемента сыпучей среды; F_c – касательная сила, действующая на элемент сыпучей среды.

Вес элемента сыпучей среды равен

$$\Delta G = \Delta m g, \quad (2)$$

где Δm – масса выделенного элемента сыпучей среды, равная $\Delta m = \frac{\gamma}{g} \Delta x \Delta y b$; γ – удельный вес сыпучей среды.

Касательные силы, действующие на элемент сыпучей среды, определяются через касательные напряжения по формуле

$$F_c = [\tau_n - (\tau_n + \Delta \tau_n)] \Delta y b, \quad (3)$$

где τ_n – максимальные касательные напряжения.

Учитывая, что максимальные напряжения от y не зависят, подставляя (2) и (3) в (1), после преобразования, устремив Δx к нулю ($\Delta x \rightarrow 0$), получим

$$\frac{d\tau_n}{dx} = \gamma. \quad (4)$$

Решим уравнение (4) при условии: при $x = 0$ $\tau_n = 0$, получим

$$\tau_n = \gamma x. \quad (5)$$

Из круга Мора [7] с учетом (5) имеем

$$\sigma_\delta = \frac{\tau_n}{f} = \frac{\lambda}{f} x; \quad (6)$$

$$\sigma_n = \tau_n (1 + 2f^2) = \frac{\gamma}{f} x (1 + 2f^2); \quad (7)$$

$$f = \operatorname{tg} \varphi,$$

где φ – угол внутреннего трения сыпучего груза

Следовательно, максимальные касательные τ_n и нормальные напряжения σ_n , σ_δ являются линейными функциями от координаты x .

Главные нормальные напряжения в этой зоне, согласно [7], определяются по формулам

$$\sigma_1 = \tau_n (1 + f^2 + \sqrt{1 + f^2}) = \gamma x \left(\frac{1}{f} + f + \sqrt{1 + f^2} \right); \quad (8)$$

$$\sigma_2 = \tau_n (1 + f^2 - \sqrt{1 + f^2}) = \gamma x \left(\frac{1}{f} + f - \sqrt{1 + f^2} \right). \quad (9)$$

Рассмотрим зону динамического свода **С**. В этой зоне сыпучий груз находится в пластичном состоянии и имеет максимальные напряжения. При этом из-за близости этой зоны к выпускному отверстию нормальные напряжения σ_n уменьшаются и на выходе из нее принимают значения, равные нулю (см. рис. 1).

Для определения скорости частиц в зоне **С**, также как в зоне **В**, выделим малый элемент сыпучего груза (рис. 3) и применим к нему закон Ньютона. Тогда в проекциях на вертикальную ось получим

$$\Delta m \frac{dv}{dt} = [p - (p + \Delta p)] \Delta x b + \Delta G + [\tau_n - (\tau_n + \Delta \tau_n)] \Delta y b, \quad (10)$$

где p – нормальное давление, действующее на частицы сыпучего груза в зоне динамического свода и зависящее от x и y .

Подставив (2) в (10), после преобразования, устремив $\Delta x \rightarrow 0$ и $\Delta y \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \gamma - \frac{d\tau_n}{dx}. \quad (11)$$

Последнее уравнение с учетом (4) запишется в виде

$$\frac{\gamma}{g} \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial y}. \quad (12)$$

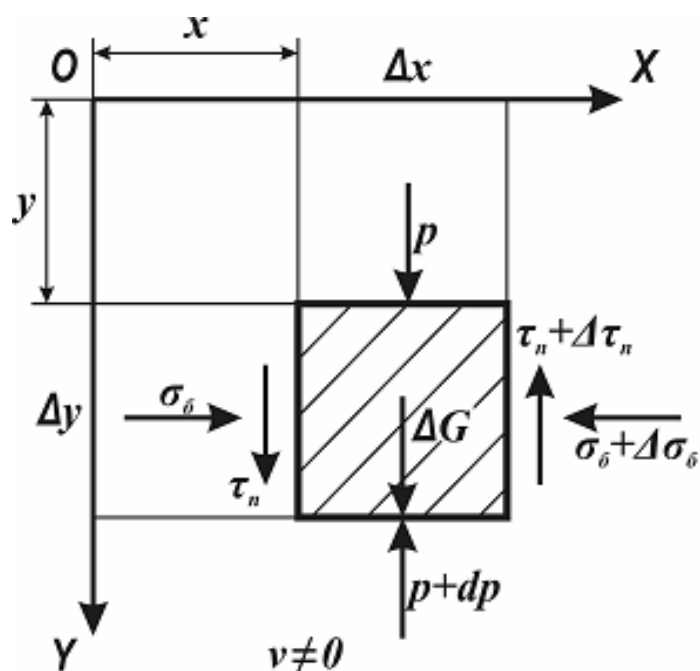


Рис. 3 – Расчетная схема определения скорости сыпучего груза в зоне динамического свода

Предположим, что процесс истечения сыпучего груза из бункера стационарен, тогда в зоне С имеем

$$v = v(x, y).$$

После дифференцирования по времени t предыдущего равенства имеем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Учитывая, что в зоне динамического свода С горизонтальная составляющая скорости частиц сыпучей среды малы, т.е. $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = v$, то последнее равенство перепишем в виде

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dt}. \quad (13)$$

Подставив (13) в (12), получим

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{g}{\gamma} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (14)$$

Проинтегрируем последнее уравнение при начальных условиях $v=0$, $p=\sigma_n$, получим

$$V_\partial = \sqrt{2g \frac{\sigma_n - p}{\gamma}}, \quad (15)$$

где $p=p(x, y)$

Из (15) следует, что скорость частиц сыпучей среды в зоне динамического свода зависит только от распределения нормального давления p по высоте и сечению бункера.

Скорость на выходе из динамического свода v_∂ определяется из равенства (15), подставив $p=0$. В результате получим

$$v_\partial = \sqrt{2g \frac{\sigma_n}{\gamma}}. \quad (16)$$

Из (16) и (7) следует, что скорость на выходе из динамического свода зависит только от максимального нормального давления и является функцией от координаты x .

Последняя формула совпадает с формулой Зенкова [7]. Однако, в отличие от формулы Зенкова, в формуле (16) скорость v_∂ является скоростью частиц сыпучего груза на выходе из зоны динамического свода С. В то же время в формуле Зенкова эта скорость является скоростью частиц сыпучего груза на выходе из бункера. Кроме того, у Зенкова вместо σ_n стоит некоторое среднее нормальное давление, равное

$$\sigma_{cp} = \frac{1}{2} \gamma a \chi, \quad (17)$$

где a – ширина щели бункера; $\chi = \frac{1}{f} + 2f - \sqrt{1 + f^2}$.

Подставив в (16) вместо σ_n среднее значение σ_{cp} из (17), получим скорость на выходе из бункера по Зенкову

$$v_e = \sqrt{ga\chi}. \quad (18)$$

Согласно экспериментальным данным [9], в зоне динамического свода траектории частиц сыпучего груза приблизительно совпадают с прямолинейными лучами, идущими в некоторый центр, расположенный на оси бункера и находящийся ниже щелевого отверстия.

В этом случае, согласно работе [13], меньшее главное напряжение σ_2 в любой точке движущегося груза совпадает с траекториями движения частиц. С другой стороны, так как траектории движения частиц сыпучего груза в зоне динамического свода мало отличаются от вертикальных линий, то нормальная составляющая приближенно совпадает с главным напряжением $\sigma_n \approx \sigma_2$.

Подставив в формулу (16) вместо σ_n главное нормальное напряжение σ_2 , получим скорость движения частиц сыпучего груза на выходе из зоны динамического свода

$$v_\partial = \sqrt{2g \frac{\sigma_2}{\gamma}}. \quad (19)$$

Как отмечалось выше, в зоне обрушения **Д** частицы сыпучего груза находятся в непрерывном хаотическом движении в результате столкновений между собой. Следовательно, сыпучий груз в этой зоне находится в свободно-дисперсном состоянии и, согласно Сэвиджу [10], его внутренние напряжения определяются по формулам

$$\tau = \frac{1}{3} \rho_c k^2 d^2 \left(\frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2; \quad p = \frac{1}{3} \rho_c k' k^2 d^2 \left(\frac{\partial v_c}{\partial y} \right)^2 \quad (20)$$

где ρ_c – средняя плотность насыпного груза; k – кинетический коэффициент, характеризующий потерю механической энергии потока сыпучего груза в результате столкновения частиц ($k = 10-13$); k' – безразмерный коэффициент, характеризующий потерю механической энергии частиц сыпучего груза в результате ударов частиц между собой ($k' = 0,3-0,4$); d – средний диаметр частицы сыпучего груза; v_c – средняя скорость потока сыпучего груза в данной точке.

В этом случае, как показано в работе [14], сыпучий груз описывается уравнением Навье-Стокса.

С помощью круга Мора можно показать, что для несвязного сыпучего груза граница между динамическим сводом **С** и зоной обрушения **Д** представляет собой перевернутую параболу [7]

$$y = h_c \left[1 - \left(\frac{2x}{a} \right)^2 \right], \quad (21)$$

где h_c – высота параболы, определяемая по формуле

$$h_c = \frac{a(1 + \sin \varphi)}{4 \cos \varphi} = \frac{a}{4} \left(f + \sqrt{1 + f^2} \right). \quad (22)$$

Заменим границу между зоной динамического свода и зоной обрушения прямолинейными отрезками, совпадающими с боковыми сторонами равнобедренного треугольника, основание которого совпадает со щелевым отверстием бункера, а высота совпадает с высотой параболы h_c (рис. 4). Уравнение этой границы можно записать в виде

$$y = h_c \left(1 - \frac{2|x|}{a} \right), \quad (23)$$

где $-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2}$.

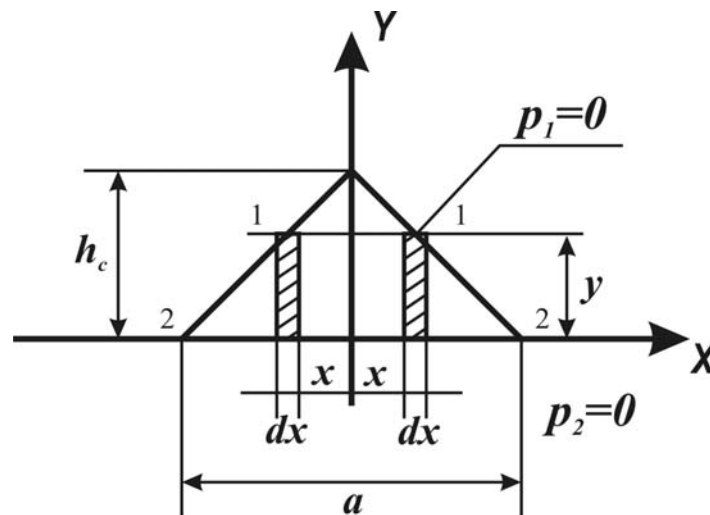


Рис. 4 – Расчетная схема определения скорости течения сыпучего груза в зоне обрушения

Применив уравнение Бернулли к сечениям 1-1 и 2-2 рассмотренного треугольника (см. рис. 4), получим

$$Z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \zeta \frac{v_2^2}{2g}, \quad (24)$$

где Z_1, Z_2 – уровни сечений 1-1 и 2-2 относительно оси ox ; p_1, p_2 – нормальные напряжения сыпучего груза в точках пересечения сечения 1-1 с боковыми сторонами треугольника и соответствующих точках сечения на выходе из бункера; v_1, v_2 – скорости частиц сыпучего груза в тех же точках сечений 1-1 и 2-2; ζ – коэффициент местных потерь Дарси-Вейсбаха при движении сыпучего груза в зоне обрушения, характеризующий потери механической энергии потока сыпучего груза при столкновении частиц между собой [15, 16].

Подставим в (24) соответствующие значения $Z_1=y$; $Z_2=0$; $p_1=0$; $p_2=0$; $v_1=v_0$; $v_2=v_0$. После преобразований получим значение скорости частиц сыпучего груза на выходе из бункера

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2gy + v_0^2}. \quad (25)$$

Последнее равенство с учетом (19) примет вид

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \sqrt{2g \left(y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)}. \quad (26)$$

Объемный расход через щелевое отверстие определим по формуле

$$Q = \int_{-a/2}^{a/2} v_0 b dx. \quad (27)$$

Подставив в последнее выражение (25), получим

$$Q = \frac{b}{\sqrt{1+\zeta}} \int_{-a/2}^{a/2} \sqrt{2g \left(y + \frac{\sigma_2}{\gamma} \right)} dx. \quad (28)$$

Подставив в (28) (9) и (23), после интегрирования получим

$$Q = \frac{2}{3} b a^{1,5} \sqrt{g} \frac{1}{\sqrt{1+\zeta}} \frac{K_1^{1,5}}{(K_1 - \chi')} \left[1 - \left(\frac{\chi'}{K_1} \right)^{1,5} \right], \quad (29)$$

где $K_1 = \frac{1}{2} (f + \sqrt{1+f^2})$, $\chi' = f + \frac{1}{f} - \sqrt{1+f^2}$.

Определим коэффициент местных потерь ζ при движении сыпучего материала в зоне обрушения.

Согласно работе [16], коэффициент ζ при движении сыпучего груза по лотку и прямолинейному каналу определяется по формуле

$$\zeta = \frac{k^2 d^2 l}{0,24 h^3}, \quad (30)$$

где l – длина канала, h – высота канала.

Подставив в выражение (30) $l=h_c$ и $h=a$, получим

$$\zeta = 4,17k^2d^2 \frac{h_c}{a^3}. \quad (31)$$

Согласно (22), максимальную высоту границы динамического свода h_c можно записать в виде

$$h_c = K_1 \frac{a}{2}. \quad (32)$$

Подставив (32) в (31), получим

$$\zeta = K_1 K_2 \frac{k^2 d^2}{a^2}, \quad (33)$$

где K_2 – некоторый безразмерный коэффициент, зависящий от условий истечения сыпучего груза из бункера (прямое или боковое истечение сыпучего груза из бункера) и определяемый из эксперимента.

Коэффициент расхода при истечении сыпучего груза из бункера согласно [3] определяется по формуле

$$\eta = \frac{Q}{ba^{1,5}\sqrt{g}}. \quad (34)$$

Подставляя (29) в (34) с учетом (33), после преобразований получим

$$\eta = \frac{\delta\eta_0}{\sqrt{\delta^2 + k^2 K_1 K_2}}, \quad (35)$$

где $\eta_0 = \frac{2}{3} \frac{K_1^{1,5}}{(K_1 - \chi')} \left[1 - \left(\frac{\chi'}{K_1} \right)^{1,5} \right]$; $\delta = \frac{a}{d}$.

Из формулы (35) следует, что если $\delta \rightarrow \infty$, то $\eta \rightarrow \eta_0$.

Расчеты показали, что при $f = 0,7 \div 0,58$ ($\varphi = 35^\circ \div 30^\circ$) $\eta_0 \approx 1$. Это означает, что для мелких сыпучих грузов коэффициент расхода η мало зависит от коэффициента внутреннего трения, ширины щели и диаметра частиц.

Для сравнения определим коэффициент расхода η на основе теории Зенкова [7].

Подставив (18) в (27), имеем

$$Q = ba^{1,5}\sqrt{g\chi}. \quad (36)$$

Затем, подставив (36) в (34), получим

$$\eta = \sqrt{\chi}. \quad (37)$$

Расчеты показали, что при $f=0,7 \div 0,58$ ($\varphi=35^\circ \div 30^\circ$) $\eta = 1,27 \div 1,31$.

Из равенства (35) следует, что коэффициент расхода при истечении сыпучего груза из бункера зависит от его коэффициента внутреннего трения f и отношения ширины щели бункера к диаметру частиц. В то же время, по теории Зенкова (см. (37)) этот коэффициент зависит только от коэффициента f внутреннего трения и не зависит от ширины выпускного отверстия a бункера и диаметра частиц сыпучего груза d .

На рис. 5 показаны зависимости коэффициентов расхода η от δ , вычисленные по формуле (35) (кривая 1) и по формуле (37) (прямая 2) при $f = 0,64$, ($\varphi=32,6^\circ$).

Кроме того, на рис. 5 показаны результаты экспериментальных исследований при истечении различных грузов из бункера со щелевым отверстием.

При этом параметры бункера и груза принимали значения $b=0,09$ м; $f=0,64$ ($\varphi=32,6^\circ$); $k=12$; $K_2=1$; $5 \leq a \leq 50$ мм и $0,35 \leq d \leq 7$ мм.

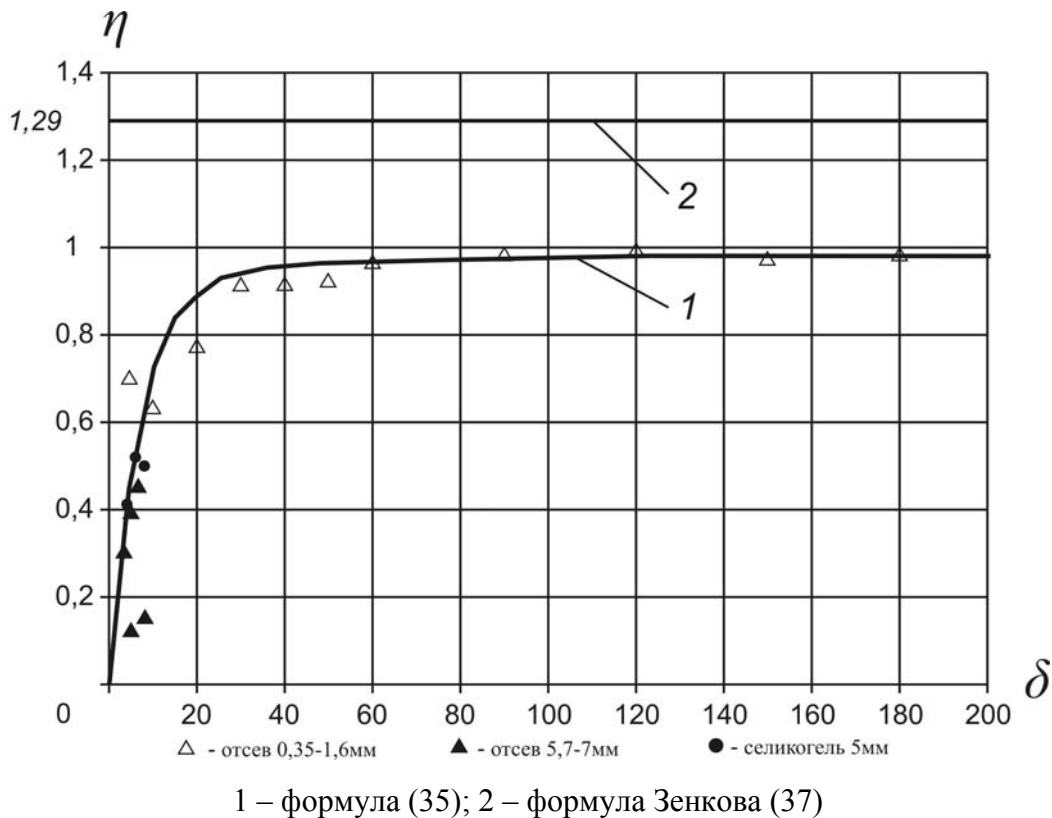


Рис. 5 – График зависимости коэффициента η от безразмерного параметра δ

Из рис. 5 видно, что экспериментальные данные достаточно хорошо совпадают с кривой 1, т.е. с вышеизложенной теорией, и существенно отличаются от теории Зенкова.

Другими словами, расход сыпучего груза при его истечении из бункера с щелевым отверстием, рассчитанный по формуле Зенкова (37), приблизительно на 30 % выше реального расхода. Кроме того, из рис. 5 видно, что если $\delta \geq 100$,

то коэффициент расхода практически не изменяется, и для всех часто встречаемых на практике сыпучих грузов при $f=0,7\div 0,58$ ($\varphi=35^\circ\div 30^\circ$) приблизительно равен единице ($\eta \approx 1$).

Следовательно, на основе структурно-механического анализа движения сыпучего груза в бункере получена математическая модель его истечения щелевого отверстия, которая достаточно хорошо совпадает с экспериментальными данными.

Кроме того, из выражения (35) следует, что коэффициент расхода при истечении сыпучего груза из бункера со щелевым отверстием зависит от коэффициента внутреннего трения и отношения ширины щели к диаметру частиц. При этом, с увеличением δ коэффициент расхода увеличивается и при $\delta \rightarrow \infty$ стремится к единице, т.е. $\eta \rightarrow \eta_0 \approx 1$. Другими словами, для часто встречающихся мелких сыпучих грузов ($\delta \geq 100$) коэффициент расхода приблизительно равен 1 ($\eta \approx 1$). В этом случае объемный расход сыпучего груза из бункера со щелевым отверстием определяется по формуле

$$Q = ba^{1,5} \sqrt{g}, \quad (38)$$

а средняя скорость по формуле

$$v_{cp} = \sqrt{ga}. \quad (39)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Покровский Г.И. Об истечении сыпучих тел / Г.И. Покровский, А.И. Арёфьев // Журнал технической физики. - 1937. - Т. 7. - №4. - С. 424-427.
2. Линчевский И.П. К вопросу об истечении сыпучих тел // Журнал технической физики. - 1939. - Т. 9. - №4. - С. 342-347.
3. Кенеман Ф.Е. О свободном истечении сыпучих тел // Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение. - 1960. - №2. - С. 70-77.
4. Квапил Р. Движение сыпучих материалов в бункерах. - М.: Госгортехиздат, 1961. - 80 с.
5. Лукьянов П.И. Аппараты с движущимся зернистым слоем. Теория и расчет. - М.: Машиностроение, 1974. - 184 с.
6. Циборовский Я. Свободное истечение сыпучего материала через отверстие в конусном днище сосуда / Я. Циборовский, М. Бондзынськи // Инженерно-физический журнал. - 1963. - Т. 6. - №7. - С. 26-35.
7. Зенков Р.Л. Механика насыпных грузов. - М.: Машиностроение, 1964. - 251 с.
8. Платонов Н.П. Некоторые вопросы механики потока сыпучих сред // Инженерно-физический журнал. - 1967. - Т. 12. - №6. - С. 806-812.
9. Кочанова И.И. О видах движения при гравитационном истечении сыпучих материалов // Инженерно-физический журнал. - 1971. - Т. 10. - №5. - С. 815-821.
10. Сэвидж С.Г. Гравитационное течение несвязных гранулированных материалов в лотках и каналах // Сб. Механика гранулированных сред. Под. ред. А.Ю. Ишлинского - М.: Мир, 1985. - Вып. 36. - С. 86-146.
11. Гячев Л.В. Движение сыпучих материалов в трубах и бункерах - М.: Машиностроение, 1968. - 184с.
12. Малахов Г.М. Теория и практика выпуска обрушенной руды / Г.М. Малахов, В.Р. Безух, П.Д. Петренко. - М.: Недра, 1968. - 311 с.
13. Надаи А. Пластичность и разрушение твердых тел. - М.: Мир, 1969. - Т.2. - 864 с.
14. Кирия Р.В. Кинетический подход к выводу уравнений движения сыпучих сред // Вісник Дніпропетровського Державного Університету: Механіка: - Днепропетровск: ДГУ. - 1999. - Вып. 2. - С. 143-150.
15. Штернлихт Д.В. Гидравлика. - М.: Энергоатомиздат, 1984. - 639 с.
16. Кирия Р.В. О коэффициенте внутренних потерь при движении сыпучей среды по элементам перегрузочных узлов ленточных конвейеров // Геотехническая механика. - Днепропетровск - 2003. - Вып. № 41. - С. 159-167.